ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 22 FÉVRIER 1943.

PRÉSIDENCE DE M. G. BERTRAND.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS
DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Remarques géométriques sur le problème des moments dans l'espace hilbertien.* Note de M. **Gaston Julia**.

1. Le problème des moments dans l'espace hilbertien $\mathcal{H}$ consiste dans la détermination d'un vecteur X, solution du système d'équations

$$(X_k, X) = \overline{\xi_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \infty), \tag{1}$$

les X_k et les ξ_k étant respectivement des vecteurs et des scalaires complexes donnés. Sans restreindre la généralité, on peut supposer indépendants les X_k. D'une part F. Riesz a donné une condition nécessaire et suffisante bien connue pour des ξ_k quelconques; d'autre part E. Schmidt, étudiant le cas où les ξ_k sont coordonnées d'un vecteur ξ de $\mathcal{H}$ $\left(\sum|\xi_k|^2 \text{ convergente}\right)$, a donné une condition nécessaire et suffisante d'un autre type pour que le problème soit possible quel que soit ξ. On va établir ici la condition de F. Riesz par une méthode géométrique très intuitive, montrer qu'elle équivaut à celle d'E. Schmidt et ajouter quelques compléments relatifs à l'emploi du système dual des X_k dans la question étudiée.

2. Soit V la variété fermée $[X_1, \ldots, X_n, \ldots]$. Si $V = \mathcal{H}$, le problème n'admet qu'une solution au plus. Si $V < \mathcal{H}$ et si le problème a une solution, il en a une infinité obtenue en ajoutant un vecteur arbitraire de la variété complémentaire $\mathcal{H} - V$; parmi elles une et une seule appartient à V, c'est celle de plus petit module, et elle est la projection sur V de toutes les autres. Bornons-nous à la détermination de cette solution *située dans* V, ce qui reviendra à prendre V pour l'espace hilbertien $\mathcal{H}$ sur lequel nous raisonnons.

Le problème *réduit*, détermination de X^n, solution de

$$(X_k, X^n) = \overline{\xi_k} \quad \text{pour } k = 1, \ldots, n, \quad \text{avec } X^n \in V_n = [X_1, \ldots, X_n], \tag{2}$$

a une solution pour tous n et ξ_k, les X_k étant indépendants. Si la solution X

de (1) existe, elle se projette orthogonalement en X^n sur V_n; X^n converge fortement vers X, pour $n=\infty$. On doit donc déterminer X^n pour chaque n; $X^{n+1}-X^n$ est orthogonal à V_n; la série $X^1+\sum_1^\infty(X^{n+1}-X^n)$, à termes orthogonaux 2 à 2, convergera fortement vers X si $\sum\|X^{n+1}-X^n\|^2$ converge. Or $\|X^{n+1}-X^n\|^2=\|X^{n+1}\|^2-\|X^n\|^2$ et $\|X^n\|^2$ croît avec n; la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de X est donc $\overline{\lim}_{n=\infty}\|X^n\|<+\infty$.

On détermine X^n par $X^n=P_{V_n}X$. Il faut déterminer les λ_k du vecteur $Y^n=\sum^n\lambda_k X_k$ de V_n de façon que la longueur de la projection orthogonale de X sur Y^n soit *maxima* (alors Y^n se confond avec X^n en direction). La longueur de cette projection est

$$|(Y^n, X)|.\|Y^n\|^{-1}=\left|\sum^n\overline{\lambda}_k(X_k, X)\right|.\|Y^n\|^{-1}=\left|\sum^n\overline{\lambda}_k\overline{\xi}_k\right|.\left\|\sum^n\lambda_k X_k\right\|^{-1}.$$

1° Il faudra donc déterminer le *maximum de* $\left|\sum^n\lambda_k\xi_k\right|.\left\|\sum^n\lambda_k X_k\right\|^{-1}$ *lorsque les* λ_k *varient arbitrairement*. En substituant X^n à X dans le raisonnement précédent, on voit que le point extrémant trouvé n'est autre que $X^n=\left(\sum^n\overline{\lambda}_k\overline{\xi}_k\right).\left(\sum^n\lambda_k X_k\right).\left\|\sum^n\lambda_k X_k\right\|^{-2}$; on a

$$\|X^n\|=M_n=\text{Max de}\left|\sum^n\lambda_k\xi_k\right|.\left\|\sum^n\lambda_k X_k\right\|^{-1}.$$

2° n croissant, M_n croît. Si M_n reste borné, la série $\sum(\|X^{n+1}\|^2-\|X^n\|^2)$ où $\sum\|X^{n+1}-X^n\|^2$ converge, X^n converge fortement vers X de V, donnée par $X=X_1+\sum(X^{n+1}-X^n)$, qui résout le système (1), $\|X\|=\lim M_n$. Si M_n ne reste pas borné, le système (1) n'a pas de solution. La condition nécessaire et suffisante est donc

$$(3)\qquad \lim_{n=\infty}M_n=\overline{\lim}_{n=\infty}\left|\sum^n\lambda_k\xi_k\right|.\left\|\sum^n\lambda_k X_k\right\|^{-1}<+\infty$$

ou aussi

$$(3')\qquad \underline{\lim}_{n=\infty}\left\|\sum^n\lambda_k X_k\right\|.\left|\sum^n\lambda_k\xi_k\right|^{-1}>0.$$

Lorsque les X_k ne sont pas indépendants, le résultat subsiste. En particulier, le problème *restreint* (F. Riesz) : existence d'une solution X de (1) telle que $\|X\|\leq C$ sera possible si, et seulement si $\lim M_n\leq C$ ou si $\left|\sum^n\lambda_k\xi_k\right|\leq C\left\|\sum^n\lambda_k X_k\right\|$ pour tous λ_k. Si $M=\lim M_n<+\infty$ avec $M>C$, le problème restreint est

impossible, mais il devient possible pour les $\xi'_k = \xi_k . \mathrm{CM}^{-1}$, avec solution $X' = X . \mathrm{CM}^{-1}$, X solution du problème (1) général.

3. Supposons (1) résoluble pour tous les ξ_k tels que $\sum |\xi_k|^2$ converge. La condition d'E. Schmidt est

$$\underline{\lim}_{n=\infty} \left\| \sum^n \lambda_k X_k \right\| . \left(\sum^n |\lambda_k|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \nu > 0$$

ou bien

$$(4) \qquad \overline{\lim}_{n=\infty} \left(\sum^n |\lambda_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \left\| \sum^n \lambda_k X_k \right\|^{-1} = \mu < +\infty.$$

Lorsqu'elle est vérifiée, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne, en posant $\|\xi\|^2 = \sum |\xi_k|^2$,

$$\overline{\lim}_{n=\infty} \left| \sum^n \lambda_k \xi_k \right| . \left\| \sum^n \lambda_k X_k \right\|^{-1} \leq \|\xi\| . \overline{\lim}_{n=\infty} \left(\sum^n |\lambda_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \left\| \sum^n \lambda_k X_k \right\|^{-1} = \|\xi\| . \mu < +\infty,$$

ce qui prouve que (4) entraîne (3).

Inversement, si (3) est vérifiée pour tout $\xi = \sum \xi_k e_k$ de $\mathcal{H}$, le problème (1) est possible et détermine, pour tout ξ de $\mathcal{H}$, un vecteur unique $X(\xi)$, limite forte de $X^n(\xi)$, solution du problème réduit. Évidemment $\|X^n(\xi)\|^2$ est une fonctionnelle continue positive de ξ, et la suite des $\|X^n(\xi)\|^2$ converge en tout point ξ de $\mathcal{H}$. Par un lemme connu (Osgood-Banach), cette suite est uniformément bornée dans la sphère unité et l'on a, pour tout ξ, $\|X(\xi)\| \leq M \|\xi\|$. [$X(\xi)$ est opérateur linéaire borné.] En particulier, pour $\xi = \xi^n = \sum^n \xi_k e_k$, $\|X^n(\xi^n)\| \leq M \|\xi^n\|$, quel que soit n.

(3) étant vérifiée pour tout $\xi = \sum \xi_k e_k$, on aura, en particulier, pour $\lambda_k = \bar{\xi}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, et pour tout n,

$$\left| \sum^n \lambda_k \xi_k \right| . \left\| \sum^n \lambda_k X_k \right\|^{-1} = \left(\sum_n |\xi_k|^2 \right) . \left\| \sum^n \bar{\xi}_k X_k \right\|^{-1} \leq \|X^n(\xi^n)\| \leq M \|\xi^n\|,$$

d'où se déduit

$$\overline{\lim}_{n=\infty,\ \lambda \text{ variables}} \left(\sum^n |\lambda_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \left\| \sum_n \lambda_k X_k \right\|^{-1} \leq M,$$

qui n'est autre que (4).

Les conditions (3) et (4) sont donc bien équivalentes pour exprimer la résolubilité de (1) pour tout $\xi = \sum \xi_k e_k$ de $\mathcal{H}$.

4. La méthode s'applique aisément à la recherche du *système* $\{Y_k\}$ *dual du système* $\{X_k\}$. Nous appelons ainsi le système des vecteurs Y_k, *situés dans*

$V=[X_1, \ldots]$, et tels que $(X_i, Y_k)=\delta_{ik}$ ($\delta_{ik}=1$ si $i=k$, $\delta_{ik}=0$ si $i\neq k$). Pour chaque k, le vecteur Y_k est unique s'il existe; la condition (3′) se réduit ici à $\underline{\lim}_{n=\infty}\left|X_k+\sum^{n\,\prime}\lambda_i X_i\right|>0$ $\left(\text{la sommation }\sum' \text{ excluant } i=k\right)$; elle exprime (condition connue) que X_k n'est pas situé dans la variété $[X_1, \ldots, X_{k-1}, X_{k+1}, \ldots]$, ou encore que la suppression de X_k restreint effectivement la variété $[X_1, \ldots]$. Lorsque cette condition nécessaire et suffisante est vérifiée pour chaque k, le système des $\{Y_k\}$ ($k=1, 2, \ldots$) est bien déterminé.

D'après ce qui précède, il est clair que $Y_k=Y_k^1+\sum_{k=1}^{\infty}(Y_k^{n+1}-Y_k^n)$, où $Y_k^n=P_{V_n}Y_k$ satisfait à $(A_i, Y_k^n)=\delta_{ik}$ pour $i=1, 2, \ldots, n$. Le système des Y_k^n ($k=1, 2, \ldots, n$) est le dual de $X_1, \ldots, X_n$, *dans* V_n.

L'interprétation de (3) est alors aisée. La considération des vecteurs $X'_n=\sum^{n}\lambda_k X_k$ et $Y'_n=\sum^{n}\bar{\xi}_k Y_k$ permet de l'écrire

$$\overline{\lim}_{n=\infty}|(Y'_n, X'_n)|\cdot\|X'_n\|^{-1}<+\infty \qquad \text{ou} \qquad \overline{\lim}_{n=\infty}\|P_{X'_n}Y'_n\|<+\infty.$$

Lorsque les λ varient, n restant fixe, X'_n décrit V_n et $\|P_{X'_n}Y'_n\|$ a pour maximum $\|P_{V_n}Y'_n\|$. La condition (3) s'écrit donc simplement

$$(3'') \qquad \overline{\lim}_{n=\infty}\|P_{V_n}Y'_n\|=\overline{\lim}_{n=\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}\bar{\xi}_k Y_k^n\right\|<+\infty,$$

et l'on a

$$X^n=\sum_{k=1}^{n}\bar{\xi}_k Y_k^n, \qquad \text{avec} \quad \lim_{n=\infty}X^n=\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\bar{\xi}_k Y_k^n=X,$$

solution du problème (1).

Il en résulte enfin que, si X est un vecteur quelconque de $\mathcal{H}$, en posant $\bar{\xi}_k=(X_k, X)$, la suite $\sum_{k=1}^{n}(X_k, X).P_{V_n}Y_k=\sum_{k=1}^{n}(X_k, X).Y_k^n$ converge fortement vers X pour $n=\infty$, alors qu'en général il n'en est pas de même pour $\sum^{n}(X_k, X).Y_k$ comme nous le verrons ultérieurement.

La condition (3″) caractérise enfin, de façon simple, tous les points $\xi=\sum^{\infty}\xi_k e_k$ de $\mathcal{H}$, qui appartiennent au domaine des valeurs $\Delta_{A^\star}$ de l'opérateur fermé $A^\star X=\sum^{\infty}e_k.(A_k, X)$.

M. **Auguste Chevalier** fait hommage à l'Académie, en son nom et de la part de l'Éditeur, du Fascicule II de son Ouvrage *Les Caféiers du globe. Iconographie des Caféiers sauvages et cultivés* (1).

L'auteur s'est attaché à décrire et à faire dessiner sous sa direction, tous les caféiers connus existant dans les grands Herbiers du globe qu'il est allé consulter sur place ou qu'on a bien voulu lui communiquer. Grâce à un concours de circonstances favorables, il a pu mener ce travail à bonne fin.

Il avait revisé dans la période 1925-1937 tous les *Coffea* qu'il avait récoltés au cours de ses voyages, ainsi que ceux existant dans les diverses collections de l'Herbier du Muséum. En 1938, peu de temps avant la déclaration de guerre, il eut communication des *Coffea's* existant dans les collections des Jardins botaniques de Berlin-Dahlen, de Coïmbre (Portugal), de Bruxelles, de La Haye, de Buitenzorg (Java).

Au mois d'avril 1940, il put se rendre à Londres, à l'Herbier du British Museum et à celui de Kew Gardens pour reviser les Coffea's renfermés dans ces collections. C'est ainsi qu'il a pu examiner tous les types existant dans ces grandes collections et les faire dessiner.

Malgré les difficultés de la période actuelle, l'éditeur, M. Paul Lechevalier a fait diligence pour tirer cet Ouvrage dans les circonstances présentes. Aussi doit-il être remercié.

M. **Léon Guillet** fait hommage à l'Académie de l'Ouvrage qu'il vient de publier sous le titre *Les étapes de la Métallurgie*.

PRÉSENTATIONS.

Dans la formation d'une liste de candidats à la Chaire d'Anatomie comparée du Muséum National d'Histoire naturelle, pour la première ligne M. *Jacques Millot* obtient 27 suffrages contre 7 à Mlle *Madeleine Friant* et 5 à M. *Paul Chabanaud*; il y a 2 bulletins blancs.

Pour la seconde ligne M. *Paul Chabanaud* obtient 26 suffrages contre 8 à Mlle *Madeleine Friant*; il y a 2 bulletins blancs.

En conséquence, la liste présentée à M. le **Ministre Secrétaire d'État a l'Éducation Nationale et a la Jeunesse** comprendra :

En première ligne .... M. **Jacques Millot**.
En seconde ligne .... M. **Paul Chabanaud**.

(1) 1 vol. in-4°, 36 p. + 158 planches. Paris, 1942.

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

Georges Baeckeroot. *Oesling et Gutland. Morphologie du Bassin ardennais et luxembourgeois de la Moselle* (présenté par M. E. de Martonne).

THÉORIE DES NOMBRES. — *Une arithmétique des biquaternions.* Note de M. **Gaston Benneton**, présentée par M. Paul Montel.

L'identité de Brioschi permet de transformer le produit de deux sommes de 8 carrés en une seule somme de 8 carrés. Inversement on peut rechercher si, dans le domaine des nombres entiers, une somme quelconque de 8 carrés est décomposable en produit de deux sommes.

1. Nommons *biquaternion* un nombre hypercomplexe d'ordre 8 de la forme $A + \omega B$, où A et B désignent deux quaternions et où ω est un opérateur vérifiant

$$(\omega X) Y = \omega(X\bar{Y}), \qquad Y(\omega X) = \omega(YX), \qquad (\omega X)(\omega Y) = -\bar{Y}X,$$

quels que soient les quaternions X et Y, le conjugué de Y étant $\bar{Y}$.

La multiplication de deux biquaternions s'écrit

$$(A + \omega B)(C + \omega D) = AC - \bar{D}B + \omega(DA + B\bar{C});$$

elle n'est pas commutative, ni associative.

La norme du biquaternion $N = A + \omega B$ est le produit de N par son conjugué $\bar{N} = \bar{A} - \omega B$: elle vaut la somme des carrés des 8 composantes de N. La norme d'un produit égale le produit des normes, ce qui traduit l'identité de Brioschi.

Ce système de biquaternions, qui comprend les quaternions comme cas particulier, ne diffère des *octaves* de Cayley [1] que par l'ordre des unités.

2. Un biquaternion est dit entier si ses composantes sont des nombres entiers, il est dit primitif si les composantes sont premières entre elles dans leur ensemble. Un biquaternion est premier si sa norme est un nombre premier. Dans la suite nous écrirons les biquaternions en lettres majuscules et leurs normes en minuscules correspondantes.

Pour que le biquaternion A soit divisible à droite (ou à gauche) par B, il faut et il suffit que $A\bar{B}$ (ou $\bar{B}A$) soit divisible par b.

Nous définissons ainsi les restes des biquaternions suivant le module m : Si m est impair, le reste de A (mod m) est le biquaternion R congru à A dont

---

[1] *Math. Papers*, 1, Cambridge, 1889, pp. 127-301.

les composantes sont comprises entre $-m/2$ et $m/2$. Si m est pair, nous considérons deux restes de A (mod m) dont les composantes sont comprises entre $-m/2$ et $(m+1)/2$: le reste R, reste normal congru à A, et le reste R' congru à A + C, les composantes de C étant toutes égales à $m/2$.

Les propriétés sont les suivantes. Pour m pair, A quelconque, un au moins des deux restes de A (mod m) a une norme inférieure ou égale à m^2.

Pour m impair, A quelconque, un au moins des 8 multiples A, 2A, 2^2A, ..., 2^7A a pour reste (mod m) un biquaternion de norme inférieure à m^2. En outre, k étant le plus petit nombre vérifiant $4^k \equiv 1$ (mod m), un au moins des k multiples A, 2A, ..., 2^{k-1}A a pour reste un biquaternion de norme inférieure à $8m^2/9$.

Si nous supposons la norme de A divisible par m, et si R est un reste de A (mod m), les deux biquaternions A et R sont divisibles à droite et à gauche par les mêmes biquaternions de norme m, ou n'admettent tous deux aucun diviseur de norme m.

3. Cette dernière propriété donne un algorithme simple pour la décomposition d'un biquaternion N en produit de facteurs N = AB suivant les normes a, b. Désignons par m le plus grand nombre réel qui divise à la fois 2N, a, b, et par C le moindre reste de $2N/m$ (mod 2). La norme de C vaut 0 ou 4.

Si C est nul, N est décomposable en autant de produits qu'il y a de biquaternions de norme m. Les facteurs B et A sont de la forme

$$lB = MS_1S_2\ldots S_\alpha, \qquad lb\bar{A} = MS_1S_2\ldots S_\alpha\bar{N},$$

où l est un nombre entier réel, M est un biquaternion quelconque de norme m, S_1, S_2, ..., S_α sont certains biquaternions de normes croissantes.

Si la norme C vaut 4, N est décomposable d'autant de manières qu'il y a de biquaternions M de norme m rendant le produit MC divisible par 2.

Les seuls biquaternions indécomposables en produit de facteurs (dont aucun n'est unitaire) sont les biquaternions premiers et les biquaternions primitifs ayant pour norme une puissance de 2 et pour reste (mod 2) un biquaternion de norme 4 indécomposable. L'échange de deux composantes convenablement choisies transforme ces derniers en biquaternions décomposables.

4. Appelons biquaternion réduit U tout biquaternion primitif de l'une des formes 1, 0, 0, 0, x, y, z, t ou 0, 0, 0, 0, x, y, z, t.

Tout biquaternion premier P peut être considéré comme diviseur à droite d'un biquaternion réduit et, d'autre part, se décompose en un produit de biquaternions réduits, à un facteur près l nombre naturel :

$$lP = U_1U_2\ldots U_\alpha, \qquad U_0 = NP.$$

De l'étude de cette dernière égalité, il résulte que le nombre des biquaternions de norme p premier impair vaut 16 fois le nombre total des solutions des trois congruences (prises séparément)

$$x^2+y^2+z^2+t^2+1 \equiv 0, \qquad x^2+y^2+1 \equiv 0, \qquad x^2+1 \equiv 0 \qquad (\text{mod } p).$$

Ce total vaut $16(p^3+1)$, ce qui démontre le théorème de Jacobi sur les sommes de 8 carrés pour les nombres premiers. Le théorème général se déduit par multiplication.

Le nombre des biquaternions primitifs de norme n est égal à

$$16kn^3\prod\left(1+\frac{1}{p^3}\right),$$

produit étendu à tous les diviseurs premiers de n, le coefficient k valant 7/9 pour n double de nombre impair, valant 35/36 pour n quadruple de nombre impair, valant l'unité dans tout autre cas.

Si n est multiple de 4, le nombre des biquaternions primitifs ayant quatre composantes impaires sur huit vaut $(140/9)n^3\Pi[1+(1/p^3)]$.

Si n est multiple de 8, le nombre des biquaternions primitifs à composantes toutes impaires vaut $(4/9)n^3\Pi[1+(1/p^3)]$.

MÉCANIQUE PHYSIQUE. — *Sur certaines causes de dispersion des résultats dans l'étude des phénomènes de fatigue.* Note de MM. **Xavier Waché** et **Pierre Chevenard**, présentée par M. Léon Guillet.

Au moyen d'une micromachine créée au laboratoire d'Imphy [1], nous avons entrepris de suivre les progrès de la fatigue d'un métal au cours d'un essai de torsion alternée. L'appareil admet une éprouvette de $1^{mm},5$ de diamètre et de 10^{mm} de longueur. Il lui impose, à la fréquence de 25 par seconde, des cycles de torsion dont on peut faire varier l'amplitude, et il enregistre photographiquement le diagramme *couple-torsion* par le jeu d'un trépied optique. La finesse et la vigueur du tracé permettent une élaboration précise du cycle enregistré, dont l'aire mesure l'énergie dissipée par frottement intérieur. En divisant cette perte Δw par le double de l'énergie élastique w accumulée dans le barreau tordu, on obtient le décrément δ : la variation du paramètre δ, en fonction du nombre N de cycles, caractérise la modification du métal par fatigue.

Dans tous les cas, les résultats relatifs à une même éprouvette donnent des points bien groupés autour d'une courbe moyenne d'allure régulière. Au contraire, nos premiers résultats obtenus sur des éprouvettes distinctes, mais qui nous semblaient identiques, se sont révélés le plus souvent assez discordants; une semblable dispersion est d'ailleurs habituelle dans les essais de ce genre, puisque l'on a émis bien des fois l'opinion que chaque éprouvette a son « individualité ». Avant de poursuivre nos recherches, nous nous sommes proposé d'étudier les *causes de cette dispersion*. Dès maintenant, il nous paraît opportun d'attirer l'attention sur l'importance des moindres détails dans les conditions de l'usinage et du traitement thermique des éprouvettes.

---

(1) *Comptes rendus*, 211, 1940, p. 631.

L'influence de ces détails apparaît dès le début des essais comme le prouvent les expériences suivantes. Elles concernent trois lots de microéprouvettes en acier nickel-chrome-molybdène (C = 30; Ni = 2,0; Cr = 0,6, Mo = 0,4 %) trempées à 850° dans l'huile, revenues à 700° pendant 30 minutes, puis refroidies par immersion dans l'huile. Celles du premier lot A ont été usinées puis traitées, les chauffes de trempe et de revenu étant effectuées *sous le vide*. Celles du deuxième lot B ont été tournées dans un barreau trempé puis revenu à 550° et, une fois achevées, ont subi sous le vide un revenu de 30 minutes à 700°. Les microéprouvettes du troisième lot C proviennent d'un barreau de 4^{mm} de diamètre qui, après traitement thermique, a été tourné avec précaution. On a imposé à chaque microéprouvette des cycles lents dont on a fait croître progressivement l'amplitude, et l'on a construit la courbe du décrément δ en fonction de la contrainte au cisaillement $\mathfrak{T}$ de la fibre extérieure, courbe dont on connaît l'allure rapidement ascendante.

Dans la figure 1 les zones hachurées A, B, C représentent les aires de dispersion des courbes (δ, $\mathfrak{T}$) pour les trois lots, comprenant chacun 3 microéprouvettes. Par rapport à l'aire A, le décalage de l'aire C a pour cause

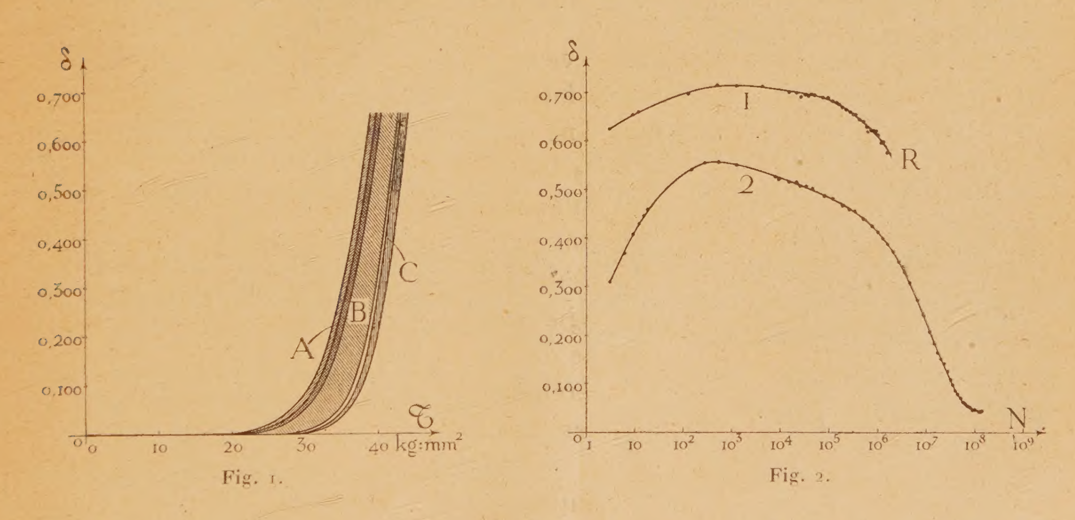


Fig. 1. Fig. 2.

principale l'écrouissage dû à l'usinage après traitement; le décalage de l'aire B prouve que, contrairement à ce que nous pensions, cet écrouissage n'est pas sûrement effacé par un revenu de 30 minutes à 700°.

L'influence des conditions d'usinage et de traitement est encore plus marquée sur l'allure des courbes de fatigue, qui représentent le décrément δ en fonction du nombre N de cycles. Des expériences ont été faites avec un acier eutectoïde, recuit à 800° pendant 30 minutes et refroidi lentement. Certaines microéprouvettes ont été usinées après recuit et d'autres ont été recuites sous le vide après usinage. L'amplitude des cycles, à laquelle correspondait un taux de contrainte $\mathfrak{T} = 19,4$ kg/mm², avait été choisie de manière à obtenir une hystérésis initiale assez forte.

Dans tous les cas, les premières éprouvettes ont donné des courbes (δ, N) situées au-dessus des autres, et leur durée de vie a été sensiblement plus courte. Ainsi, des deux éprouvettes dont les résultats sont groupés dans la figure 2, la première, usinée après recuit (courbe 1), n'a guère supporté que 1 million de cycles avant de se rompre; l'autre, recuite après usinage (courbe 2), était encore intacte après plus de 100 millions, et le cycle primitivement très enflé (δ 0,310) s'était transformé par accommodation en un cycle d'hystérésis beaucoup moindre (δ 0,042).

Enfin nos expériences ont montré l'influence d'une légère oxydation superficielle des éprouvettes et, d'une façon générale, de toutes les particularités de leur état de surface.

ÉLECTROMAGNÉTISME. — *Sur la rationalisation des unités électriques.* Note de M. **Émile Bryliński.**

Nous avons examiné la rationalisation des unités magnétiques [1]. Celle des unités électriques se présente sous un aspect assez différent en raison de la loi fondamentale de Coulomb

$$f = \frac{1}{\varepsilon}\frac{QQ_1}{r^2}, \tag{1}$$

de laquelle il résulte que toute modification de l'unité de constante diélectrique modifie nécessairement l'unité de charge électrique et par conséquent toutes les unités électriques.

La condition imposée à tout système de rationalisation de maintenir sans changement les unités électriques pratiques équivaut donc à l'interdiction de modifier l'unité de constante diélectrique.

La rationalisation électrique consiste à remplacer l'équation du flux d'induction électrique

$$\int (\mathcal{D}.dS) = 4\pi Q \tag{2}$$

par la formule rationalisée (nous distinguons par un accent les grandeurs soumises à la rationalisation)

$$\int (\mathcal{D}'.dS) = Q. \tag{3}$$

Il en résulte que l'on a

$$\mathcal{D} = 4\pi\mathcal{D}'. \tag{4}$$

De la définition de l'induction

$$\mathcal{D} = \varepsilon\mathcal{E}, \tag{5}$$

---

[1] *Compes rendus*, 216, 1943, p. 113.

il résulte alors que

(6) $$\mathcal{D}' = \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathcal{E}.$$

Ce mode de rationalisation a été employé par Maxwell (et à sa suite par M. Darrieus), qui a construit sa théorie sur le *déplacement électrique* $\mathcal{D}'$ définie par l'équation (6) concurremment avec l'emploi de l'induction électrique $\mathcal{D}$.

Mais le système usuel de rationalisation électrique se refuse à introduire le facteur 4π dans la formule et maintient l'équation (5) sous la forme

(5bis) $$\mathcal{D}' = \varepsilon' \mathcal{E}.$$

Il en résulte immédiatement la conclusion

(7) $$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{4\pi}.$$

L'unité de constante diélectrique est donc modifiée, de sorte que ce système de rationalisation est incompatible avec le maintien des unités électriques pratiques.

La rationalisation électrique ne peut, par conséquent, être réalisée que par le procédé de Maxwell. Elle soulève une contradiction apparente qu'il faut lever.

Considérons deux conducteurs parallèles rectilignes indéfinis parcourus par des courants i et i_1, situés dans le vide à la distance r l'un de l'autre. La force exercée par le courant i sur une longueur l du courant i_1 a pour expression

(8) $$f = 2\mu_0 \frac{i i_1 l}{r}.$$

Il semble résulter de cette formule que le maintien de l'unité de courant, et par conséquent de toutes les unités électriques, soit lié au maintien de l'unité de perméabilité magnétique et non à celui de l'unité de constante diélectrique, mais ce n'est qu'une apparence.

L'équation (8) dérive, en effet, de l'expression $[\mathcal{B}.i dl]$ de la force que subit un élément de courant $i dl$ dans un champ d'induction magnétique $\mathcal{B}$, et elle s'écrit au stade intermédiaire

(8bis) $$f = \mathcal{B} i_1 l.$$

Sous cette forme, on voit que l'unité de courant électrique n'est pas modifiée par la rationalisation tant que l'unité d'induction magnétique ne l'est pas. Allons plus loin : dans tous les systèmes de rationalisation magnétique, on a, dans ce cas,

(9) $$\mathcal{H}' = \frac{\mathcal{H}}{4\pi} = \frac{i}{2\pi r}.$$

Dans le système de Dellinger-Darrieus, on a, en outre,

(9) $$\mathcal{B}' = \mathcal{B} = 4\pi\mu\,\mathcal{H}' = 2\mu\frac{i}{r},$$

et par conséquent la formule (8).

Dans le système usuel de rationalisation magnétique, on a au contraire

(10) $$\mathcal{B}' = \mathcal{B} = \mu' \mathcal{H}' = \frac{\mu'}{2\pi} \frac{i}{r},$$

de sorte que l'équation (8) doit être remplacée par

(11) $$f = \frac{\mu'_0}{2\pi} \frac{i i_1 l}{r}.$$

Comme μ'_0 est égal à $4\pi\mu_0$, la formule (11) donne pour l'unité de courant électrique la même valeur que (8), parce que la valeur de l'unité d'induction magnétique a été maintenue sans changement, ce qui nécessite que l'unité de potentiel électrique ait également été maintenue sans changement. On peut donc employer le système usuel de rationalisation magnétique seule sans modifier les unités électriques pratiques, mais il est facile de vérifier que dans ce cas l'expression de la vitesse de la lumière dans le vide

(12) $$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

doit être remplacée par

(13) $$c = 2\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon_0 \mu'_0}}.$$

C'est cette circonstance qui permet de modifier l'unité de perméabilité magnétique sans modifier l'unité de constante diélectrique.

CHIMIE MINÉRALE. — *Possibilités de réactions de métaux fondus sur les oxydes métalliques.* Note de MM. **Félix Trombe** et **Marc Foëx**, présentée par M. Paul Lebeau.

Lorsqu'on soumet une surface d'oxyde solide (préalablement fondu ou aggloméré), par exemple, une paroi de creuset, à l'attaque d'un métal fondu susceptible de la réduire à la température d'expérience, la réaction, selon le cas, pénétrera dans l'oxyde ou, au contraire, restera très superficielle.

Après de nombreux essais, nous avons acquis la certitude que cette pénétration de la réaction sera conditionnée, à la température d'expérience, par la valeur du rapport $\Gamma = B/A$, entre le volume B des corps produits non volatils et insolubles dans le métal en fusion et le volume A de l'oxyde initial disparu au cours de la réaction.

Lorsque $\Gamma > 1$, en général la réaction s'arrête rapidement par suite de la formation d'un écran protecteur continu, dû aux produits fixes formés au début de l'attaque.

Lorsque $\Gamma < 1$, l'écran protecteur, qui doit se répartir sur la surface que lui impose son support, comportera un certain nombre de fissures dans lesquelles le métal fondu sera poussé en profondeur par la pression atmosphérique et sa pression propre. La réaction gagnera toute la masse du solide qui conserve

souvent à la température d'expérience son volume apparent primitif et sa forme initiale.

Le tableau suivant résume quelques-uns des essais qui nous permettent d'affirmer la validité de la règle de pénétration énoncée ci-dessus.

Constituants		Produits						
phase solide.	phase. liquide.	insolubles.	solubles.	t°C.	A.	B.	Γ = B/A.	
O^2Si (verre)	Ca	OCa SiO^3Ca	Si	900	27,2	34 27,2	1,25 1,00	
» »	Na	ONa^2 SiO^3Na^2	Si	250	27,2	55,2 34,4	2,03 1,26	
» »	Ce	O^3Ce^2	Si	900	27,2	31,5	1,16	
» »	La	O^3La^2	Si	1000	27,2	34	1,25	(*a*)
» »	Nd	O^3Nd^2	Si	1000	27,2	31	1,14	
O^3Al^2 (p. f.)	Mg	OMg	Al	800	26,4	34,2	1,30	
» »	Ca	OCa	Al	900	26,4	51	1,93	
OCu »	Zn	OZn	Cu	500	12,6	14,4	1,14	
OPb »	Al	O^3Al^2 et Pb	»	750	23,9	8,8+19,8	1,20	
O^2Si (quartz)	Al	O^3Al^2	Si	800	23,3	17,6	0,76 (*b*)	
» (verre)	Al	O^3Al^2	Si	800	27,2	17,6	0,65 (*c*)	
» »	Al	O^3Al^2	Si	900	27,2	17,6	0,65 (*d*)	
» »	Mg	OMg	Si	900	27,2	22,8	0,84 (*e*)	
» »	Li	OLi^2 SiO^3Li^2	Si	250	27,2	30 24	1,10 0,88	(*f*)
O^3Bi^2 (p. f.)	Zn	OZn	Bi	500	57	43,2	0,76	

p. f., préalablement fondu; A, volume moléculaire des constituants solides initiaux à t°C.; B, volume des produits insolubles formés à t°C. à partir d'une molécule-gramme d'oxyde.

Observations. — (*a*) Pas de pénétration, attaque superficielle. (*b*) Pénétration 0,15 mm/h. (*c*) Pénétration, 0,25 mm/h. (*d*) Pénétration, 0,8 mm/h. (*e*) Pénétration, 2 à 5 mm/h. (*f*) Pénétration (vitesse non mesurée).

Il est nécessaire de bien connaître les réactions successives qui, à une température donnée, peuvent se produire entre les composés initiaux et finaux. La pénétration du lithium dans la silice, qui n'aurait probablement pas lieu s'il se formait uniquement l'oxyde OLi^2, s'effectue, grâce à une combinaison ultérieure donnant du silicate de lithium dont le volume est inférieur à celui de la somme des volumes de ses constituants OLi^2 et O^2Si. La valeur de Γ dans ces conditions est plus petite que 1.

Même si $\Gamma < 1$, la pénétration métallique est parfois ralentie ou même arrêtée dans les réfractaires poreux (oxydes agglomérés). La même pression peut alors s'établir des deux côtés de la surface d'attaque, soit par transmission de la pression atmosphérique dans l'épaisseur du réfractaire, soit si les gaz inertes inclus dans les porosités de ce dernier établissent une pression suffisante. La tension superficielle plus ou moins élevée du métal liquide l'empêche alors de pénétrer dans les fissures capillaires créées par la réaction.

Dans le cas général de l'attaque des oxydes compacts, avec $\Gamma < 1$, la pénétration métallique est, toutes choses égales par ailleurs, d'autant plus rapide

que Γ est plus petit. Les vitesses d'attaque par l'aluminium des différentes variétés de silice (verre de silice et quartz) (voir tableau) illustrent cette conclusion.

Les vitesses de pénétration varient beaucoup avec la solubilité, à la température d'expérience, des métaux déplacés par le métal fondu constituant la phase liquide initiale. Citons le cas (voir tableau) de la résistance de l'oxyde de plomb à l'attaque de l'aluminium fondu. Le plomb liquide insoluble dans l'aluminium est retenu dans les fissures de l'alumine déposée. Il peut être considéré comme participant à la formation de la couche protectrice stable. On a alors $A < B$, soit $\Gamma > 1$. Si le plomb n'intervenait pas comme phase insoluble on aurait $\Gamma < 1$.

Dès que l'on atteint, dans un bain métallique à température déterminée, l'état de saturation en un métal produit par la réaction, ce métal participera à la constitution de la surface protectrice. La faible solubilité du zirconium dans l'aluminium explique la résistance de la zircone à ce dernier métal, car la phase protectrice est constituée par un réseau mixte pratiquement inattaquable d'alumine cristallisée et de zirconium.

GÉOLOGIE. — *Sur la radioactivité élevée des roches marines du terrain houiller du Nord de la France.* Note de Mlle **Georgette Muchemblé**, présentée par M. Charles Jacob.

Ayant entrepris des recherches sur la radioactivité des eaux souterraines, il m'a été suggéré de porter parallèlement les investigations sur les roches qui les contiennent. Les eaux radioactives du Nord de la France ayant leur origine dans le terrain houiller, c'est sur cette formation qu'ont d'abord été dirigées les expériences.

Dès à présent, on peut déduire les conclusions exposées ci-après d'une série de 30 analyses effectuées méthodiquement, avec contre-épreuves cruciales, suivant un programme dressé par M. P. Pruvost.

Pour le dosage du radium, nous avons employé les méthodes enseignées par M. Lepape au Laboratoire d'Hydrologie du Collège de France. Tous les résultats ci-dessous sont exprimés en 10^{-12} g de radium par gramme de roche.

1° Dans le terrain houiller, les horizons marins, quel que soit leur niveau stratigraphique, et non point les dépôts d'eau douce qui les encadrent, sont anormalement radioactifs :

Niveaux marins. — Assise de Bruille, 6,37 à 10,5; niveau de Poissonnière, 2,22; niveau de Rimbert (P.-de-C.), 2,83; niveau d'Ægir (Westphalie), 4,38.

Dépôts d'eau douce (schistes à plantes ou à faune limnique), 0,94 à 1,12.

2° Parmi ces roches marines, ce sont les schistes ampéliteux de l'assise de Bruille qui sont les plus radioactifs (teneurs oscillant entre 2,3 et 10,5).

Ainsi s'explique la radioactivité des eaux thermales de Saint-Amand-les-Eaux, qui proviennent de cet horizon.

3° Dans ces schistes ampéliteux, la radioactivité est cantonnée au schiste

lui-même, non aux nodules de pyrite ou de carbonate de chaux qu'ils renferment. Schistes, 6,37 à 6,58; pyrite, 0,25; nodules calcaires, 1,85.

4° Le calcaire carbonifère, immédiatement subordonné à ces schistes très radioactifs, présente une radioactivité très faible (0,66 et 0,68).

5° Ni les roches éruptives de la région, ni les roches métamorphiques, ne sont spécialement radioactives (porphyrite de Quenast, 0,85; ardoises cambriennes de Belgique, 0,88 à 1,01). Partout ailleurs, et très généralement, les teneurs des gneiss et des granites n'excèdent pas 2,1.

D'où il faut conclure que la radioactivité constatée dans le cas qui nous occupe n'a pas son origine directe dans la profondeur de la croûte terrestre et n'est pas en relations avec les phénomènes du géodynamisme interne.

6° Par contre dans les terrains cambriens, à radioactivité faible (0,88) des environs de Spa, existent des horizons noirs ampéliteux à Graptolithes (*Dictyonema*) qui nous ont révélé une teneur en radium élevée (3,21). Ainsi s'expliquerait également la radioactivité des eaux de Spa, qui sourdent à leur voisinage.

7° Suivant en direction la bande des schistes radioactifs de Bruille le long du bord septentrional du bassin, on trouve la progression suivante d'Ouest en Est. Courrières, 2,3 à 2,6; Vicoigne, 5,4 à 6,5; Baudour (Belgique), 10,2 à 10,5.

Cette augmentation vers l'Est est à rapprocher du fait que, dans cette direction, les faciès sont plus franchement marins : la lagune houillère communiquait avec la haute mer par sa région orientale.

Ainsi *les fines boues marines, riches en organismes, ayant donné naissance à des schistes charbonneux du type des ampélites, sont des roches de radioactivité anormalement élevée*. Or on sait par les recherches de J. Joly (¹), de H. Peterson et de Piggot que, dans les océans actuels, ce sont les boues bleues, les argiles rouges, les vases à Globigérines et Radiolaires qui présentent ce caractère (teneurs en Ra de 3,9 à 13,1).

Nous constatons de plus, comme l'a fait J. Joly en 1908 pour les dépôts actuels des grands fonds marins, que *les hautes teneurs en éléments radioactifs sont réservées aux sédiments pauvres en carbonate de chaux*.

Il semble donc que se pose désormais la question d'une relation possible entre la radioactivité et les vases marines et, peut-être, l'activité biologique au sein des mers.

A $16^h 10^m$ l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à $16^h 20^m$. L. B.

(¹) *Proc. R. Soc.*, Dublin, (N. Ser.), **11**, 1908, p. 288; **14**, 1914, p. 255.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages reçus pendant les séances de février 1943.

Atlas clinique d'Ophtalmoscopie photographique. Syndromes cliniques du fond de l'œil, par Henri Tillé et André Couadau. Paris, Masson et Cie, 1939; 1 vol. 32cm (présenté par M. A. de Gramont).

Électrochimie. Les principes, par René Audubert et Marguerite Quintin. Paris, Presses universitaires de France, 1942; 1 vol. 19cm,5.

Savoir en histoire naturelle. Vol. XI. *Ce qu'il faut savoir des Reptiles et Batraciens de France*, par Gaston Portevin. Paris, Paul Lechevalier, 1942; 1 vol. 19cm (présenté par M. A. Chevalier).

L'hygiène du cœur. — Considérations sur le rhumatisme chronique et sur son traitement. — Dix ans de surdimutité volontaire chez les Maîtres de la phtisiologie officielle. — La mode en thérapeutique et, en particulier, dans le traitement de la tuberculose. — Sanatariums. — L'asthme, sa pathogénie et son traitement. — L'urticaire. — La frénésie sportive et l'usure du cœur. — Le phénomène le plus important de la pathologie : l'insolubilisation (précipitation et floculation). — Les phénomènes biologiques explicables par les propriétés des Colloïdes et des Micelloïdes et par leur floculation, par Auguste Lumière. Lyon, Laboratoire Lumière, s. d.; 10 fasc. 21cm.

Le problème de l'anaphylaxie, par Auguste Lumière. Paris, Gaston Doin, 1924; 1 vol. 22cm,5.

Centre anticancéreux de Lyon. *Le cancer. Maladie des cicatrices*, par Auguste Lumière. Paris, Masson et Cie, 1929; 1 vol. 20cm,5.

Colloïdes et Micelloïdes. Leur rôle en biologie et en médecine, par Auguste Lumière. Paris, Éditions médicales Norbert Maloine, 1933; 1 vol. 22cm,5.

Hérédo-Tuberculose, par Auguste Lumière. Lyon, Imprimerie Léon Sézanne, 1935; 1 vol. 22cm,5.

La renaissance de la médecine humorale, par Auguste Lumière. Deuxième édition revue et augmentée. Imprimerie Léon Sézanne, 1937; 1 vol. 22cm,5.

Quelques travaux complémentaires relatifs à la propagation de la tuberculose. Lyon, Imprimerie Léon Sézanne, 1937 à 1941; 5 fasc. 21cm,5.

L'œuvre scientifique de Auguste Lumière dans le domaine de la biologie et de la médecine, par Paul Vigne. Lyon, Imprimerie Léon Sézanne, 1938; 1 vol. 22cm.

(*A suivre.*)